

**Fabio Grasso**

Dipartimento di Scienze Statistiche  
Università degli Studi di Roma “La Sapienza”

**RISCHIO  
E  
RIASSICURAZIONE**

SIA

5° corso FAC

*Modelli e tecniche per la riassicurazione nei rami danni*

Roma, 4 maggio 2021

# 1. Premesse

## (a) Numero di sinistri, risarcimenti

Si consideri un **portafoglio** costituito da  $n$  contratti di assicurazione contro i danni riferiti ad un medesimo tipo di rischio e caratterizzati da una prestazione risarcitoria. Tali contratti siano contemporaneamente stipulati, contraddistinti da un eguale periodo (annuale) di copertura e relativi a **rischi analoghi** con riferimento:

- a) alle caratteristiche del rischio adeguatamente valutabili all'epoca di stipulazione del contratto;
- b) alle condizioni contrattuali di copertura, ma non necessariamente anche ai valori monetari di esposizione al rischio.

Nel periodo di copertura, siano  $X_1, X_2, \dots, X_n$  i **risarcimenti globali** posti a carico dell'assicuratore per i singoli contratti del portafoglio. In relazione al  $j$ -esimo ( $j=1,2,\dots,n$ ) contratto si ha

$$(1) \quad X_j = \sum_{i=0}^{N_j} Y_{i,j} ,$$

dove:

- $N_j$  è il **numero di sinistri** che colpiscono il contratto;
- $Y_{i,j}$  ( $i=0,1,\dots; Y_{0,j} \equiv 0$ ) è il **risarcimento** a carico dell'assicuratore in relazione all' $i$ -esimo sinistro in ordine cronologico.

Considerando l'intero portafoglio è quindi

$$(2) \quad X = \sum_{j=1}^n X_j = \sum_{j=1}^n \sum_{i=0}^{N_j} Y_{i,j}$$

il **risarcimento globale** a carico dell'assicuratore.

## (b) Guadagno di portafoglio

Con riferimento alle **condizioni pure** del rapporto assicurativo, sia  $G_j$  il **guadagno**, per l'assicuratore, relativo al  $j$ -esimo contratto del dato portafoglio. Si ha quindi

$$(3) \quad G_j = \Pi_j - X_j ,$$

dove  $\Pi_j$  è il corrispondente **premio puro**.

E' immediata la determinazione dei principali valori caratteristici della distribuzione di probabilità di  $G_j$ . Innanzitutto, il valore atteso

$$(4) \quad E(G_j) = \Pi_j - P_j = r_j$$

e la varianza

$$(5) \quad \text{var}(G_j) = \text{var}(X_j) = \sigma_j^2 ,$$

dove  $P_j$  e  $r_j$  indicano, rispettivamente, il premio equo (vale a dire,  $P_j = E(X_j)$ ) ed il caricamento di sicurezza per il dato contratto.

Si definisce poi **guadagno di portafoglio** l'importo

$$(6) \quad G = \sum_{j=1}^n G_j = \Pi - X ,$$

dove è

$$(7) \quad \Pi = \sum_{j=1}^n \Pi_j = \sum_{j=1}^n (P_j + r_j) = P + r ,$$

con evidente significato di  $P$ ,  $r$  e  $\Pi$ .

Il guadagno di portafoglio,  $G$ , ha valore atteso

$$(8) \quad E(G) = \sum_{j=1}^n r_j = r$$

e, nell'ipotesi che i risarcimenti globali  $X_1, X_2, \dots, X_n$  siano tra loro indipendenti, varianza

$$(9) \quad \text{var}(G) = \text{var}(X) = \sum_{j=1}^n \sigma_j^2 = \sigma^2 .$$

### (c) **Indice di stabilità relativa**

Al fine di fornire utili indicazioni sulla **rischiosità del portafoglio** si osserva che l'assicuratore si prefigge di mantenere sufficientemente bassa, in particolare eguale ad una data soglia  $\eta^*$  ritenuta accettabile, la probabilità

$$(10) \quad \varepsilon = \Pr\{G < -W\} = \Pr\{X > W + P + r\} ,$$

vale a dire la probabilità dell'evento “*l'onere aleatorio per risarcimenti supera la somma dell'ammontare globale dei premi puri e del margine di solvibilità inizialmente a disposizione dell'assicuratore in relazione al portafoglio*”.

Nella (10) il **margine di solvibilità**,  $W$ , è costituito da mezzi propri (capitale, riserve libere) dell'assicuratore non destinati, a differenza delle riserve tecniche, alla copertura di specifici impegni in termini di valore atteso. Più precisamente,  $W$  va considerato come una quota parte del margine di solvibilità,  $W^{\text{tot}}$ , a disposizione dell'assicuratore per l'intera attività assicurativa esercitata nell'ambito delle assicurazioni contro i danni.

La probabilità dell'evento

$$\{X > W + P + r\}$$

è propriamente la **probabilità annuale di rovina** dell'assicuratore in relazione al portafoglio.

A partire dalla (10) si può convenientemente considerare la variabile aleatoria standardizzata  $(X-P)/\sigma$ , essendo  $\sigma = \sigma(X)$  lo scarto quadratico medio di  $X$ . Indicata con  $\Phi$  la funzione di ripartizione di  $(X-P)/\sigma$ , si ha quindi

$$(11) \quad \varepsilon = \Pr\left\{\frac{X-P}{\sigma} > \frac{W+r}{\sigma}\right\} = 1 - \Phi\left(\frac{W+r}{\sigma}\right),$$

dove il rapporto

$$(12) \quad s = \frac{W+r}{\sigma}$$

è denominato **indice di stabilità relativa** del portafoglio.

Se, in particolare, il portafoglio in esame è costituito da un numero sufficientemente grande di contratti, si può opportunamente assumere l'**approssimazione normale** per la distribuzione di probabilità di  $X$  (con valore medio  $P$  e scarto quadratico medio  $\sigma$ ). In conseguenza  $\Phi$ , nella (11), è la funzione di ripartizione della distribuzione normale standardizzata.

Fissato un livello,  $\varepsilon^*$  (ad esempio,  $\varepsilon^*=0.003$ ), che l'assicuratore considera accettabile per la probabilità annuale di rovina, dalla

$$(13) \quad s = \Phi^{-1}(1-\varepsilon^*)$$

si ottiene il valore  $s^*$  di  $s$  che consente di raggiungere il dato obiettivo.

E' immediato rilevare come la probabilità annuale di rovina,  $\varepsilon$ , decresca al crescere dell'indice di stabilità relativa,  $s$ , del portafoglio.

#### (d) **Coassicurazione e riassicurazione**

Al fine di ridurre la probabilità annuale di rovina,  $\varepsilon$ , l'assicuratore può opportunamente operare sull'indice di stabilità relativa del portafoglio,  $s$ , incrementando almeno una delle seguenti variabili decisionali:

- a) il **margin**e di solvibilità,  $W$ ;
- b) il **caricamento di sicurezza**,  $r$ .

La prima modalità è tuttavia frequentemente ostacolata dall'effettiva situazione patrimoniale dell'assicuratore, mentre la seconda è spesso resa problematica dalle condizioni di mercato.

Nelle situazioni in cui è fortemente limitata la possibilità di intervento sulle suddette due variabili, l'assicuratore deve ricorrere a strumenti che possano accrescere l'indice di stabilità relativa del portafoglio mediante una riduzione dello scarto quadratico medio del risarcimento globale  $X$ . Operano efficacemente in questo senso:

- a) la **coassicurazione**;
- b) la **riassicurazione**.

Mediante la coassicurazione l'assicuratore assume ciascun rischio insieme ad altri assicuratori, detti **coassicuratori**, e ciascuno di essi è responsabile, in caso di sinistro, per la frazione di rischio assunta. Si attua, in questo caso, un **trasferimento del rischio su base orizzontale** (vale a dire, riferito all'epoca di stipulazione del contratto di assicurazione) e l'assicurato è pienamente a conoscenza del **rapporto coassicurativo**.

Mediante la riassicurazione l'assicuratore trasferisce invece ad un altro soggetto, detto **riassicuratore**, (almeno) una parte (di alcuni) dei rischi assunti. Si attua, in questo caso, un **trasferimento del rischio su base verticale** (vale a dire, successivo all'epoca di stipulazione del contratto di assicurazione) e l'assicurato è del tutto estraneo al **rapporto riassicurativo**.

## 2. La riassicurazione

### 2.1 I profili contrattuali

Un **rapporto di riassicurazione** si può instaurare tra l'**assicuratore cedente** ed un altro assicuratore, il quale opera come **riassicuratore cessionario**, o tra l'assicuratore cedente ed un **riassicuratore professionale**, il quale non svolge **lavoro diretto**.

La cessione dei rischi operata da parte dell'assicuratore è denominata **riassicurazione passiva**, mentre la corrispondente assunzione dei rischi da parte del riassicuratore è denominata **riassicurazione attiva** (o, anche, **lavoro indiretto**).

Il rapporto tra l'assicuratore ed il riassicuratore può avvenire secondo una delle seguenti modalità:

- a) **riassicurazione facoltativa**;
- b) **riassicurazione obbligatoria**;
- c) **riassicurazione facoltativa-obbligatoria** (o, anche, "**facob**");
- d) **riassicurazione obbligatoria-facoltativa**.

In particolare, nella riassicurazione obbligatoria il rapporto tra le parti è regolamentato da un **trattato di riassicurazione**.

Il rapporto di riassicurazione, qualunque sia la modalità prescelta, può essere poi definito in base ad uno dei seguenti approcci:

- a) **individuale** (vale a dire, con riferimento al singolo contratto);
- b) **globale** (vale a dire, con riferimento all'intero portafoglio).

Con riferimento alle modalità di cessione dei rischi al riassicuratore si distinguono inoltre le seguenti **forme di riassicurazione**:

- a) **riassicurazione proporzionale**;
- b) **riassicurazione non proporzionale**.

## 2.2 I profili attuariali

Si consideri un portafoglio costituito da  $n$  contratti di assicurazione contro i danni contemporaneamente stipulati, aventi un eguale periodo (annuale) di copertura e relativi a rischi analoghi. In tale ipotesi siano inoltre  $X_1, X_2, \dots, X_n$  i **risarcimenti globali** a carico dell'assicuratore per i suddetti contratti.

La riassicurazione del portafoglio può essere opportunamente descritta tramite una  $n$ -pla di applicazioni

$$(14) \quad X_j \longrightarrow X_j^A, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

che precisano, nei riguardi dei **singoli contratti** del portafoglio, il **risarcimento globale conservato** dall'assicuratore, indicato con  $X_j^A$ .

Il **risarcimento globale ceduto** al riassicuratore, indicato con  $X_j^B$ , è pertanto dato dalla

$$(15) \quad X_j^R = X_j - X_j^A.$$

Con riferimento all'**intero portafoglio** si ha il **risarcimento globale conservato** dall'assicuratore,  $X^A$ , vale a dire

$$(16) \quad X^A = \sum_{j=1}^n X_j^A,$$

ed il **risarcimento globale ceduto** al riassicuratore,  $X^R$ , vale a dire

$$(17) \quad X^R = \sum_{j=1}^n X_j^R = X - X^A.$$

## 2.3 Il premio di riassicurazione

A fronte della cessione (parziale o totale) di rischi l'assicuratore deve corrispondere al riassicuratore un **premio di riassicurazione**, il quale rappresenta quindi il “prezzo” della garanzia riassicurativa.

In generale, esso comprende sia un **caricamento di sicurezza** sia un **caricamento per spese** ed è inoltre fortemente influenzato da diversi fattori di natura non tecnica. Tra gli altri, si segnalano:

- le **condizioni del mercato riassicurativo**;
- il **rapporto esistente tra le parti**.

Con specifico riferimento alla determinazione del **premio equo di riassicurazione** occorre distinguere tra riassicurazioni proporzionali e riassicurazioni non proporzionali.

In relazione alle **riassicurazioni proporzionali** si rileva che il premio equo è ricavato applicando la percentuale di trasferimento del rischio al corrispondente premio della copertura assicurativa di base.

In relazione alle **riassicurazioni non proporzionali** possono essere utilmente impiegati i seguenti metodi:

- a) **metodo dell' “exposure rating”**, mediante il quale il premio equo viene determinato ripartendo il premio della copertura assicurativa di base tra l'assicuratore e il riassicuratore in misura proporzionale all'esposizione al rischio delle parti;
- b) **metodo dell' “experience rating”**, mediante il quale l'esperienza di sinistrosità, concernente un'opportuna collettività di rischi riassicurati, è utilizzata:
  - in **modo retrospettivo**, per adeguare nel tempo il premio equo relativo ad un rischio riassicurato;
  - in **modo prospettivo**, per ottenere la stima iniziale del premio equo relativo ad un nuovo rischio riassicurato.

Per quel che riguarda il **caricamento di sicurezza** si osserva che il corrispondente margine applicato nella copertura assicurativa di base costituisce soltanto un elemento di riferimento per il calcolo di questa grandezza, anche nel caso delle garanzie riassicurative proporzionali. Infatti, occorre considerare che:

- la cessione dei rischi in riassicurazione determina il trasferimento al riassicuratore di **utili** attesi dall'assicuratore; in conseguenza a quest'ultimo è riconosciuta una **provvigione di riassicurazione** più o meno consistente a seconda della forma riassicurativa adottata;
- le diverse forme di riassicurazione sono caratterizzate da differenti livelli di **esposizione al rischio del riassicuratore** e comportano pertanto l'esigenza, da parte di quest'ultimo, di introdurre differenti livelli di caricamento di sicurezza nel premio puro (vale a dire, varia il "sacrificio" richiesto all'assicuratore in termini di valore atteso del guadagno di portafoglio);
- la **base statistica** utilizzata dal riassicuratore per la valutazione dei rischi riassicurati non coincide necessariamente con quella adottata dall'assicuratore al momento dell'assunzione dei medesimi rischi.

Per quanto concerne, in particolare, la **provvigione di riassicurazione** si osserva che essa è di norma ottenuta in percentuale dei premi e può essere determinata:

- a) **a priori**: in tal caso si ha una **provvigione fissa**;
- b) **a posteriori**: in tal caso si ha una **provvigione scalare**.

In relazione alla provvigione scalare le parti generalmente concordano una **provvigione provvisoria** che viene inizialmente applicata e poi eventualmente adeguata alla fine del rapporto riassicurativo. Le formule adottate per il calcolo della provvigione scalare sono basate tradizionalmente sull'andamento del rapporto percentuale sinistri a premi di competenza del portafoglio e consentono di premiare l'assicuratore nel caso in cui l'onere per sinistri osservato, in rapporto al volume dei premi incassati, sia stato inferiore alle attese.

### 3. Le riassicurazioni proporzionali

Nell'ambito della riassicurazione proporzionale si hanno le seguenti forme riassicurative:

- (1) **riassicurazione in quota;**
- (2) **riassicurazione per eccedente di somma.**

#### 3.1 La riassicurazione in quota

Nella **riassicurazione in quota** (o, anche, **riassicurazione “quota-share”**) l'assicuratore ed il riassicuratore fissano un'unica **aliquota di conservazione** (o di **ritenzione**) che è applicata all'esposizione monetaria associata a ciascun contratto del portafoglio, essendo tale esposizione espressa in termini di:

- valore (del bene) assicurato oppure di massimo danno probabile, nel caso di assicurazioni di danni a beni di proprietà;
- massimale di garanzia, nel caso di assicurazioni di responsabilità civile.

Con riferimento, ad esempio, ad un portafoglio di assicurazioni di danni a beni di proprietà costituito da  $n$  contratti, contemporaneamente stipulati, di durata annuale e con valori assicurati  $V_1, V_2, \dots, V_n$ , sia  $a$  ( $0 < a < 1$ ) l'aliquota di conservazione concordata tra le parti e, quindi,  $(1-a)$  l'aliquota corrispondente alla cessione in riassicurazione.

In relazione al  $j$ -esimo contratto del portafoglio il valore assicurato conservato dall'assicuratore è quindi

$$(18) \quad V_j^A = aV_j,$$

mentre il valore assicurato ceduto al riassicuratore è

$$(19) \quad V_j^R = (1-a)V_j.$$

In relazione all'intero portafoglio il risarcimento globale ceduto al riassicuratore è quindi

$$(20) \quad X^R = \sum_{j=1}^n X_j^R = (1-a) \sum_{j=1}^n \sum_{i=0}^{N_j} Y_{i,j}.$$

La riassicurazione in quota, molto semplice a fini operativi, riesce ad aumentare significativamente la capacità di assunzione dei rischi da parte dell'assicuratore.

A fronte di tali aspetti positivi essa, malgrado riduca la variabilità (in termini assoluti) del risarcimento globale a carico dell'assicuratore, non realizza un'efficace omogeneizzazione dei valori assicurati e, quindi, non ottiene una soddisfacente riduzione della rischiosità del portafoglio.

Dal punto di vista del riassicuratore va evidenziato l'aspetto positivo derivante dalla sua partecipazione alla totalità degli impegni assunti dall'assicuratore.

### 3.2 La riassicurazione per eccedente di somma

Nella **riassicurazione per eccedente di somma** (o, anche, **riassicurazione "surplus"**) l'assicuratore ed il riassicuratore fissano un **pieno di conservazione** corrispondente alla massima esposizione al rischio, in termini monetari, che l'assicuratore accetta di conservare per ciascun contratto.

Con riferimento ad un portafoglio di assicurazioni di danni a beni di proprietà costituito da  $n$  contratti, contemporaneamente stipulati, di durata annuale e con valori assicurati  $V_1, V_2, \dots, V_n$ , sia quindi  $C$  il pieno di conservazione concordato tra le parti.

In relazione al  $j$ -esimo contratto del portafoglio la riassicurazione per eccedente di somma individua pertanto l'aliquota di conservazione

$$(21) \quad a_j = \frac{\min(V_j; C)}{V_j} = \min\left(\frac{C}{V_j}; 1\right),$$

con  $0 \leq a_j \leq 1$ .

Il valore assicurato conservato dall'assicuratore è

$$(22) \quad V_j^A = \min(V_j; C),$$

mentre il valore assicurato ceduto al riassicuratore, detto **eccedente** (o, anche, “**surplus**”), è

$$(23) \quad V_j^R = \max(V_j - C; 0).$$

In relazione all'intero portafoglio il risarcimento globale ceduto al riassicuratore è quindi

$$(24) \quad X^R = \sum_{j=1}^n X_j^R = \sum_{j=1}^n \sum_{i=0}^{N_j} (1 - a_j) Y_{i,j}.$$

La riassicurazione per eccedente di somma, contraddistinta da una maggiore complessità operativa rispetto alla riassicurazione in quota, realizza un'efficace omogeneizzazione dei valori assicurati (quindi, una significativa riduzione della rischiosità del portafoglio).

Per quanto concerne la provvigione di riassicurazione riconosciuta all'assicuratore si osserva che in questo caso essa è di norma inferiore a quella prevista nella riassicurazione in quota poichè la cessione riguarda ora i rischi più grandi (generalmente, i peggiori) e gli utili attesi trasferiti al riassicuratore sono pertanto sensibilmente ridotti.

## 4. Le riassicurazioni non proporzionali

Nell'ambito della riassicurazione non proporzionale si hanno le seguenti forme riassicurative:

- (1) **riassicurazione “excess of loss”**;
- (2) **riassicurazione “stop-loss”**.

### 4.1 La riassicurazione “excess of loss”

Nella **riassicurazione “excess of loss”** l'assicuratore e il riassicuratore fissano un importo monetario, denominato **priorità**, corrispondente al massimo risarcimento che l'assicuratore è disponibile ad effettuare, secondo la particolare modalità riassicurativa prescelta, in relazione:

- (a) ad un sinistro che colpisce un dato contratto del portafoglio: in tal caso si ha la **riassicurazione “per risk excess of loss”**;
- (b) ai sinistri che, derivanti da un unico evento, colpiscono più contratti del portafoglio contemporaneamente: in tal caso si ha la **riassicurazione “per event excess of loss”**; se, in particolare, l'evento ha natura catastrofale allora si ha la **riassicurazione “catastrophe excess of loss”**;
- (c) ai sinistri che, nel corso di un assegnato intervallo di tempo (ad esempio, un anno), colpiscono il portafoglio: in tal caso si ha la **riassicurazione “aggregate excess of loss”**.

#### (a) Riassicurazione “per risk excess of loss”

Con riferimento, ad esempio, ad un portafoglio di assicurazioni di responsabilità civile costituito da  $n$  contratti contemporaneamente stipulati, di durata annuale e con massimali di garanzia  $M_1, M_2, \dots, M_n$ , si consideri il  $j$ -esimo contratto e sia, inoltre,  $L_j$  la **priorità** fissata in corrispondenza di tale contratto.

In relazione all'*i*-esimo sinistro che colpisce tale contratto la **riassicurazione “per risk excess of loss”** fa sì che rimanga a carico dell'assicuratore l'importo

$$(25) \quad Y_{i,j}^A = \min(Y_{i,j}; L_j) .$$

Nell'ipotesi che il trattato non preveda limiti di accettazione da parte del riassicuratore o, in altri termini, nell'ipotesi che la massima esposizione, denominata **portata**, di quest'ultimo nei confronti di un sinistro sia **totale** (vale a dire, eguale alla differenza  $M_j - L_j$ ), è trasferita al riassicuratore l'intera eccedenza rispetto alla priorità. Si ha

$$(26) \quad Y_{i,j}^R = \max(Y_{i,j} - L_j; 0) .$$

In relazione all'intero portafoglio il risarcimento globale ceduto al riassicuratore è

$$(27) \quad X^R = \sum_{j=1}^n \sum_{i=0}^{N_j} Y_{i,j}^R = \sum_{j=1}^n \sum_{i=0}^{N_j} \max(Y_{i,j} - L_j; 0) .$$

Nella pratica riassicurativa la portata prevista nella copertura “per risk excess of loss” è generalmente **parziale** (vale a dire, inferiore alla differenza  $M_j - L_j$ ). L'assicuratore deve pertanto procurarsi ulteriori coperture riassicurative, tradizionalmente articolate in **fasce** (o, anche, “**layers**”).

Indicata con  $Q_j$  la portata parziale del riassicuratore, il risarcimento ceduto a quest'ultimo, in relazione all'*i*-esimo sinistro che colpisce il *j*-esimo contratto del portafoglio, è quindi

$$(28) \quad Y_{i,j}^R = \min[\max(Y_{i,j} - L_j; 0); Q_j] .$$

**(b) Riassicurazione “per event excess of loss”.**  
**Riassicurazione “catastrophe excess of loss”**

Con riferimento ad un portafoglio di assicurazioni di responsabilità civile costituito da  $n$  contratti contemporaneamente stipulati e di durata annuale, sia  $Z$  il risarcimento globale relativo ai sinistri che, derivanti da un unico **evento**, colpiscono più contratti del portafoglio. Sia, inoltre,  $L^C$  la **priorità** fissata in corrispondenza di tale evento. Se, in particolare, l'evento ha **natura catastrofale**, la priorità  $L^C$  è anche denominata **pieno catastrofale**.

La definizione di **catastrofe** è generalmente data in termini di numero minimo di sinistri che colpiscono i contratti del portafoglio entro un assegnato intervallo di tempo dal verificarsi dell'evento (ad esempio, 72 ore). In particolare, la catastrofe può essere:

- a) **naturale** (ad esempio un'alluvione, un terremoto o un uragano);
- b) **man-made** (ad esempio un incendio o un'esplosione o un disastro dell'aviazione o della navigazione, essendo l'evento comunque originato dalle attività dell'uomo).

Mediante la **riassicurazione “per event excess of loss”** rimane a carico dell'assicuratore l'importo

$$(29) \quad Z^A = \min(Z; L^C) .$$

Nell'ipotesi che l'intervento del riassicuratore non preveda alcuna limitazione superiore (vale a dire, nel caso di portata totale) è trasferita a quest'ultimo l'intera eccedenza rispetto alla priorità, vale a dire

$$(30) \quad Z^R = \max(Z - L^C; 0) ,$$

mentre nell'ipotesi (realistica) di portata parziale,  $Q^C$ , è

$$(31) \quad Z^R = \min[\max(Z - L^C; 0); Q^C] .$$

Con specifico riferimento alla **riassicurazione “catastrophe excess of loss”**, si indichi inoltre con:

- $K$  il numero aleatorio di catastrofi che colpiscono il portafoglio nel corso dell'anno;
- $Z_h$  ( $h=1,2,\dots,K$ ) il risarcimento globale corrispondente all'h-esima catastrofe in ordine cronologico.

Stabilito il pieno catastrofale,  $L^C$ , il risarcimento globale conservato dall'assicuratore è quindi

$$(32) \quad X^A = \sum_{h=0}^K \min(Z_h; L^C) ,$$

mentre il risarcimento globale ceduto al riassicuratore è

$$(33) \quad X^R = \sum_{h=0}^K \max(Z_h - L^C; 0) .$$

### (c) **Riassicurazione “aggregate excess of loss”**

Con riferimento ad un portafoglio di assicurazioni di responsabilità civile costituito da  $n$  contratti contemporaneamente stipulati e di durata annuale, si indichi con  $L^G$  la priorità fissata in corrispondenza del portafoglio, anche denominata **priorità globale**.

Il risarcimento globale conservato dall'assicuratore, nel caso operi la **riassicurazione “aggregate excess of loss”**, è

$$(34) \quad X^A = \min(X; L^G) .$$

Nell'ipotesi (realistica) di portata parziale  $Q^G$  da parte del riassicuratore viene pertanto ceduto a quest'ultimo l'importo

$$(35) \quad X^R = \min[\max(X - L^G; 0); Q^G]$$

La riassicurazione “aggregate excess of loss” è molto vantaggiosa per l’assicuratore, il quale ottiene in tal modo la copertura dell’eventuale eccedenza positiva del risarcimento globale nei confronti della sua previsione. Tale copertura non è altrettanto gradita dal riassicuratore a causa dell’elevata aleatorietà connessa ai risarcimenti trasferiti a suo carico. In ragione di questa caratteristica essa prevede l’introduzione nel premio di riassicurazione di un più consistente caricamento di sicurezza rispetto ad altre forme di riassicurazione.

E’ frequente l’impiego di questa copertura in combinazione con una riassicurazione proporzionale, in quota o per eccedente di somma.

## 4.2 La riassicurazione “stop-loss”

Nella **riassicurazione “stop-loss”** l’assicuratore ed il riassicuratore stabiliscono un valore per il rapporto percentuale sinistri a premi di competenza del portafoglio, corrispondente al massimo risarcimento che, espresso in percentuale dei premi, l’assicuratore è disponibile ad effettuare in relazione ai sinistri che colpiscono il portafoglio in un anno. Il valore concordato tra le parti è denominato **priorità globale**.

La riassicurazione “stop-loss” è definita a livello di portafoglio ed opera in modo analogo alla riassicurazione “aggregate excess of loss” con l’unica differenza che per la priorità globale viene ora considerato un valore percentuale anziché un valore monetario.

Con riferimento ad un portafoglio di assicurazioni di responsabilità civile costituito da  $n$  contratti contemporaneamente stipulati e di durata annuale, si indichi con  $q$  il rapporto aleatorio sinistri a premi di competenza del portafoglio e con  $q^{SL}$  la fissata priorità globale. In conseguenza l’assicuratore conserva la percentuale

$$(36) \quad q^A = \min(q; q^{SL})$$

dell’ammontare globale dei premi incassati nell’anno.

Al riassicuratore è pertanto ceduta la percentuale

$$(37) \quad q^R = \max(q - q^{SL}; 0)$$

o la percentuale

$$(38) \quad q^R = \min[\max(q - q^{SL}; 0); q^*]$$

di tali premi nell'ipotesi che la portata fissata dal riassicuratore sia, rispettivamente, totale o parziale (ed eguale a  $q^*$ ).

Per quanto riguarda infine il gradimento di questa forma riassicurativa da parte dell'assicuratore e del riassicuratore vale quanto già espresso con riferimento alla riassicurazione "aggregate excess of loss".

### 4.3 La riassicurazione "E.CO.MO.R."

Nelle forme di riassicurazione non proporzionali occorre anche tenere conto delle conseguenze dell'**inflazione**, la quale può far sì che il risarcimento relativo ad un sinistro che colpisce un contratto (o relativo ad una massa di sinistri che colpiscono un portafoglio) superi, al momento della liquidazione, la fissata priorità. Questa evenienza si manifesta, in particolare, se la liquidazione dei sinistri è notevolmente differita nel tempo. Nella pratica riassicurativa viene generalmente introdotta, a tale scopo, una **clausola di stabilità** che impegna l'assicuratore ad indicizzare il livello della sua ritenzione adeguandolo nel tempo al potere d'acquisto della moneta.

Un'interessante copertura riassicurativa non proporzionale che si prefigge di limitare le conseguenze negative derivanti dall'inflazione è la **riassicurazione "Excedent du COut MOyen Relatif"** (brevemente, **riassicurazione "E.CO.MO.R."**), introdotta da Thépaut (1950).

Ai fini della sua applicazione è necessario ordinare i sinistri in base all'ammontare del relativo risarcimento.

Nell'ipotesi che i risarcimenti siano ordinati in senso non crescente, la riassicurazione "E.CO.MO.R." opera in modo analogo alla riassicurazione "excess of loss", con la differenza che la priorità corrisponde ora al risarcimento relativo all'm-esimo sinistro, per importo, che colpisce il portafoglio. A carico del riassicuratore sono pertanto trasferiti i risarcimenti eccedenti tale priorità, riguardanti i primi (più grandi) m-1 sinistri.

In generale, si consideri un portafoglio di assicurazioni contro i danni contemporaneamente stipulate e di durata annuale. Si indichino quindi con

$$(39) \quad Y_{1:N} \geq Y_{2:N} \geq \dots \geq Y_{j:N} \geq \dots \geq Y_{N:N}$$

i risarcimenti aleatori relativi agli N sinistri che colpiscono il dato portafoglio, essendo i risarcimenti ordinati in senso non crescente.

E' da osservare come le variabili aleatorie numero di sinistri, N, e risarcimento, Y, facciano qui riferimento all'intero portafoglio e non al singolo contratto del portafoglio.

Il risarcimento globale conservato dall'assicuratore, mediante il ricorso alla riassicurazione "E.CO.MO.R.", è quindi

$$(40) \quad X^A = \sum_{j=m+1}^N Y_{j:N} + mY_{m:N} ,$$

mentre il risarcimento globale ceduto al riassicuratore è

$$(41) \quad X^R = \sum_{j=1}^m Y_{j:N} - mY_{m:N} .$$

Per le concrete applicazioni della riassicurazione "E.CO.MO.R." è di particolare interesse l'impostazione (semplificatrice) originariamente proposta da Thépaut, sinteticamente descritta nel seguente esempio.

## Esempio

Con riferimento ad una riassicurazione “E.CO.MO.R.”, si ipotizzi che ai fini del **calcolo del premio di riassicurazione** si considerino, a posteriori, i risarcimenti osservati in relazione ai  $k$  sinistri che nel periodo (annuale) di copertura hanno colpito il portafoglio.

In particolare, nell’ipotesi che tali risarcimenti siano ordinati in senso non crescente, vale a dire

$$(42) \quad y_{1:k} \geq y_{2:k} \geq \dots \geq y_{j:k} \geq \dots \geq y_{k:k} \quad ,$$

si assuma che la priorità corrisponda al risarcimento,  $y_{m:k}$ , relativo all’ $m$ -esimo più grande sinistro tra i  $k$  sinistri osservati, con  $m$  fissato all’inizio del rapporto riassicurativo.

Si assuma inoltre che la distribuzione di probabilità del risarcimento,  $Y$ , sia ben rappresentata da una **distribuzione di Pareto** di parametro  $\eta$  (con  $\eta > 1$ ), vale a dire con funzione di ripartizione

$$(43) \quad F_Y(y) = 1 - y^{-\eta} \quad , \quad y \geq 1 \quad .$$

Nelle date ipotesi è agevole la determinazione del **premio equo di riassicurazione**,  $P^R$ , il quale dipende anche dall’importo (noto solo alla fine dell’anno di copertura riassicurativa)  $y_{m:k}$ . Infatti, si ha

$$(44) \quad \begin{aligned} P^R &= E(X^R) = (m-1) E[Y | Y > y_{m:k}] \\ &= (m-1) \frac{\int_{y_{m:k}}^{+\infty} y^{-\eta} dy}{1 - F_Y(y_{m:k})} \\ &= (m-1) \frac{y_{m:k}}{\eta-1} \quad . \end{aligned}$$

## 5. Le riassicurazioni miste

Alcune **riassicurazioni miste**, ottenute mediante combinazione di una forma riassicurativa proporzionale con una forma riassicurativa non proporzionale, sono di notevole interesse teorico oltrechè applicativo. Frequentemente in uso nei mercati riassicurativi è, in particolare, la riassicurazione mista descritta nel seguente esempio.

### Esempio

Si considerino una riassicurazione “aggregate excess of loss” ed una riassicurazione in quota. Indicati con  $L^G$  e con  $a$ , rispettivamente, la priorità e l’aliquota di conservazione che caratterizzano le due forme riassicurative, un’opportuna loro combinazione è data dalla copertura che mantiene a carico dell’assicuratore l’importo

$$(45) \quad X^A = \begin{cases} X & \text{se } X \leq L^G \\ L^G + a(X - L^G) & \text{se } X > L^G \end{cases}$$

e che trasferisce invece al riassicuratore l’importo

$$(46) \quad X^R = \begin{cases} 0 & \text{se } X \leq L^G \\ (1-a)(X - L^G) & \text{se } X > L^G \end{cases}$$

Tale copertura, pienamente rispondente alle esigenze dell’assicuratore, è inoltre preferita dal riassicuratore rispetto alle due garanzie che la compongono. Infatti:

- a differenza della riassicurazione “aggregate excess of loss”, essa coinvolge l’assicuratore anche per i sinistri eccedenti la priorità;
- a differenza della riassicurazione in quota, essa non prevede la partecipazione del riassicuratore alla copertura dei piccoli sinistri.

## 6. Politiche di ritenzione ottimale dei rischi

Un fondamentale aspetto dei profili attuariali della riassicurazione per le assicurazioni contro i danni è rappresentato dalla ricerca di una **politica di ritenzione ottimale dei rischi** (o, anche, **politica ottimale di riassicurazione**) con riferimento ad un portafoglio riassicurato (in forma proporzionale o non proporzionale, individuale o globale, ...).

Siano  $X_1, X_2, \dots, X_n$  i **risarcimenti globali** relativi agli  $n$  contratti del portafoglio a carico dell'assicuratore. A seguito della riassicurazione, siano  $X_1^A, X_2^A, \dots, X_n^A$  i corrispondenti **risarcimenti globali conservati** dall'assicuratore e, quindi,

$$(47) \quad X^A = \sum_{j=1}^n X_j^A$$

il **risarcimento globale conservato** dall'assicuratore in relazione all'intero portafoglio.

Introdotta un opportuno criterio di valutazione, il problema in esame può essere affrontato considerando:

- (1) il punto di vista dell'assicuratore, definendo così una **politica unilaterale di ritenzione ottimale dei rischi**;
- (2) il punto di vista dell'assicuratore e del riassicuratore, definendo così una **politica bilaterale di ritenzione ottimale dei rischi**.

La ricerca di una politica ottimale di riassicurazione (unilaterale o bilaterale) può essere condotta mediante uno dei seguenti **criteri di valutazione**:

- (a) **criterio dell'utilità attesa**;
- (b) **criterio della probabilità di rovina**.

In generale, nell'ipotesi che si considerino le **condizioni pure** del rapporto riassicurativo (quindi, il premio di riferimento è il **premio puro**), nella situazione antecedente il rapporto riassicurativo il **guadagno di portafoglio**, per l'assicuratore, è

$$(48) \quad G = \Pi - X \quad ,$$

mentre a seguito della riassicurazione si ha il guadagno

$$(49) \quad G^A = \Pi - \Pi^R - X^A \quad ,$$

dove  $\Pi^R$  è il premio (puro) di riassicurazione.

L'importo certo  $\Pi^R$  e l'importo aleatorio  $X^A$  dipendono:

- dalle aliquote di conservazione  $a_1, a_2, \dots, a_n$  fissate per i singoli contratti del portafoglio, nel caso di riassicurazione proporzionale individuale (**riassicurazione per eccedente di somma**);
- dall'aliquota di conservazione  $a$  fissata per tutti i contratti del portafoglio, nel caso di riassicurazione proporzionale globale (**riassicurazione in quota**);
- dalle priorità  $L_1, L_2, \dots, L_n$  fissate per i singoli contratti del portafoglio, nel caso di riassicurazione non proporzionale individuale (**riassicurazione “per risk excess of loss”**);
- dalla priorità globale (rispettivamente,  $L^G$  e  $q^{SL}$ ) fissata in relazione al portafoglio, nel caso di riassicurazione non proporzionale globale (rispettivamente, **riassicurazione “aggregate excess of loss”** e **riassicurazione “stop-loss”**).

Nel caso di una **riassicurazione individuale**, sia essa proporzionale o non proporzionale, la (46) assume, in particolare, l'espressione

$$(50) \quad G^A = \sum_{j=1}^n G_j^A = \sum_{j=1}^n (\Pi_j - \Pi_j^R - X_j^A) \quad .$$